Heinrich Bürger, Wien

GEDANKEN ZUR ANALYTISCHEN GEOMETRIE

Warum sollen Schüler Analytische Geometrie betreiben? Antworten auf diese Frage hängen von den Zielsetzungen des Mathematikunterrichts und von den Möglichkeiten der Realisierung solcher Ziele durch einen entsprechenden Unterricht in Analytischer Geometrie ab. Im Zusammenhang mit konkreten Aufgabenstellungen für die Schüler sollen Probleme aufgezeigt und Unterrichtsvorschläge vorgestellt werden.

1. Analyse einer Aufgabe im Hinblick auf mögliche Ziele

Die in der Unterrichtspraxis geforderten Tätigkeiten der Schüler sind weitgehend auf das rechnerische Lösen von Aufgaben beschränkt. Als Beispiel dazu die

Aufgabe 1:

Ein Dreieck hat die Eckpunkte $A = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Man berechne a) den Schwerpunkt, b) den Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

Von den Schülern wird erwartet (und verlangt), daß sie eine Aufgabe dieser Art einwandfrei lösen können. Die Lösungen dieser Aufgabe sind:

$$\text{a) } S = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } U = \begin{pmatrix} 171/166 \\ 735/166 \end{pmatrix}$$

Schülerfrage: Warum müssen wir diese Aufgabe lösen können?
Welchen Sinn hat sie?

(Diese Frage könnte auch von der Lehrerin bzw. vom Lehrer gestellt werden.)

Augenscheinlich ist das numerische Ergebnis weder von Interesse noch von Bedeutung, auch wenn der Aufgabensteller sich bemüht hätte, "schönere" Zahlen zu erhalten. (Das numerische Ergebnis ist allerdings für eine Beurteilung der Schülerleistung von Bedeutung.)

Warun wird also eine solche Aufgabe gestellt?
Welche Ziele, können mit dieser Aufgabe beabsichtigt sein?

(1) Wissen und Können (Kenntnisse und Fertigkeiten) **aktivieren, festigen, überprüfen.**

Nötiges Wissen und Können:

a) $S = \frac{1}{3} \cdot (A+B+C)$

b) - Umkreismittelpunkt = Schnittpunkt zweier Seitensymmetralen
   - Seitensysmmetrale von [AB] = Normale zu AB durch den Mittelpunkt M von [AB]
   - Aufstellen einer Gleichung der Geraden normal zu AB durch M
   - Schnittpunkt zweier Geraden ermitteln, System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten lösen

Daran kann die Frage anschließen:
Wozu muß dieses Wissen und Können erworben werden?
Mögliche Antwort: Um Analytische Geometrie betreiben zu können.
Wozu Analytische Geometrie? (Antwort in Abschnitt 2.)

Ein Vergleich der Anforderungen zeigt, daß der Aufgabenteil a) nur das Kennen einer Formel und das Einsetzen in diese Formel erfordert. Geometrische Vorstellungen und Kenntnisse (Schwerpunkt? Schwerlinie?) sind nicht nötig. Diese sind im Aufgabenteil b) nötig. Darüber hinaus stellt dieser Aufgabenteil noch die folgenden Anforderungen, die als übergeordnete Ziele für diese Aufgabenstellung angesehen werden können.

(2) Sachverhalte analysieren, Wissen und Können kombinieren

Diese Aktivitäten (analysieren, kombinieren) können als Formen von "Produktivem geistigen Arbeiten" angesehen und damit einem zentralen allgemeinen Lernziel des Unterrichts zugeordnet werden.

Problem: Üben dieser Aufgabe kann zum Abarbeiten eines Rezeptes führen.

Können durch Erweiterung der Aufgabenstellung weitere allgemeine Lernziele angestrebt werden?

(3) Zeichnerisches Darstellen

(Allgemeines Lernziel: "Darstellen und Interpretieren")

Aufgabe 2:

Man ermittle die Koordinaten des Umkreismittelpunktes in einer Zeichnung.

(4) Beschreiben des Lösungsweges in allgemeiner Form
(verbal oder formal)

(Allgemeines Lernziel: "Darstellen von Sachverhalten"

Aufgabe 3:

Man beschreibe, wie man aus den Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks den Umkreismittelpunkt berechnen kann.

Lösungsmöglichkeiten:

a) verbal:

"Man berechnet die Mittelpunkte zweier Seiten, dann ermittelt man Gleichungen der Normalen zu diesen Seiten, ..."

b) formal:

"$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A+B)$, $M_{AC} = \frac{1}{2} \cdot (A+C)$

Normalvektor der Seitensymmetrale von AB ist $\overrightarrow{AB}$

Normalvektor der Seitensymmetrale von AC ist $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} \cdot X = \overrightarrow{AB} \cdot M_{AB} \quad \wedge \quad \overrightarrow{AC} \cdot X = \overrightarrow{AC} \cdot M_{AC} \Rightarrow$ Umkreismittelpunkt X "

c) formal:

"Schreiben eines Programms zur Berechnung des Umkreismittelpunktes für eine geeignete Software"

(5) **Begründen des Lösungsweges und von Zusammenhängen**
(Allgemeines Lernziel: Argumentieren)

Aufgabe 4:

Man begründe:

a) Die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

b) Es gibt nur einen Umkreismittelpunkt.

Bemerkung:

Die unter (3) bis (5) geforderten Schüleraktivitäten können zu einem vertieften **Verständnis** von Inhalten und Beziehungen führen. Insgesamt erfolgt durch die Aufgaben 1 bis 4 eine Bearbeitung eines Problems aus verschiedenen Sichtweisen, die sich von der bloßen rechnerischen Einübung einer Aufgabenlösung abhebt.

2. WARUM ANALYTISCHE GEOMETRIE IM MATHEMATIKUNTERRICHT?

a) Geometrie ist ein grundlegender Teilbereich der Mathematik. Die Behandlung geometrischer Sachverhalte mit Mitteln der Analytischen Geometrie kann zu einer Erweiterung und Vertiefung von geometrischen Kenntnissen und Einsichten führen. Insbesondere kann durch die Behandlung von entsprechenden Problemen räumliches Vorstellungs- und Anschauungsvermögen gefördert werden.

b) Der Wechsel zwischen algebraischen Darstellungen und geometrischen Interpretationen ist eine fundamentale mathematische Methode. Er kann eine Hilfe beim Gewinnen von Erkenntnissen und beim Problemlösen sein.

c) Die Analytische Geometrie bietet ein reiches Feld für vielfältige Problemstellungen, die durch Kombinieren relativ einfacher Mittel bearbeitet werden können.

d) Beim algebraischen Darstellen geometrischer Sachverhalte, beim geometrischen Interpretieren algebraischer Sachverhalte und beim Problemlösen haben die Schüler viele Möglichkeiten, selbständig Begründungen durchzuführen.

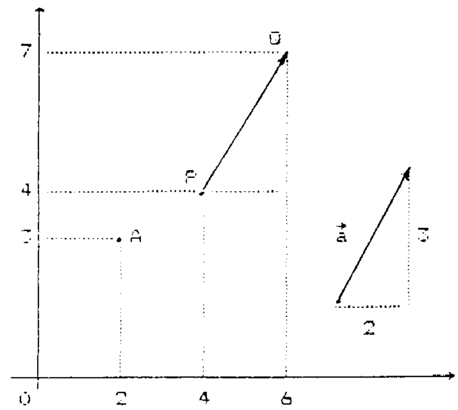
Zusammenfassend: In der Analytischen Geometrie können grundlegende mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Einsichten vermittelt werden und die Schüler können mit wichtigen mathematischen Methoden und Denkweisen vertraut werden. Ebenso können wesentliche Beiträge zu den allgemeinen Lernzielen "Darstellen und Interpretieren", "Produktives geistiges Arbeiten" und "Argumentieren" geleistet werden.

3. Zur Rolle von Vektoren in der Analytischen Geometrie

Grundlage der Analytischen Geometrie ist die umkehrbar eindeutige Zuordnung von Zahlenpaaren und Punkten der Ebene bzw. von Zahlentripeln und Punkten des Raumes durch Vermittlung eines cartesischen Koordinatensystems. Die algebraische Darstellung weiterer geometrischer Objekte wird erleichtert, wenn man auch Pfeile durch Zahlenpaare bzw. Zahlentripel beschreibt, wobei allen Pfeilen mit gleicher Länge, gleicher Richtung und gleicher Orientierung dasselbe Zahlenpaar bzw. Zahlentripel entspricht.

So kann dem Zahlenpaar $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ zugeordnet werden:

- der Punkt $A = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$,
- der Pfeil $\overrightarrow{PQ} = Q-P = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$,
- jeder Pfeil $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, der aus $\overrightarrow{PQ}$ durch Parallelverschiebung hervorgeht.

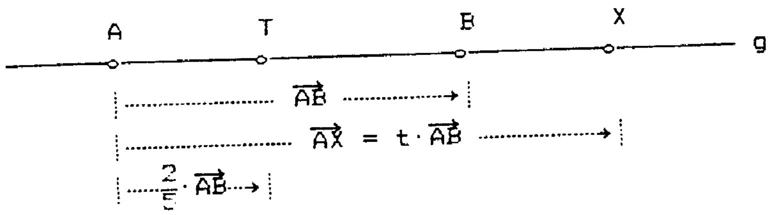


Es ist zweckmäßig, Zahlenpaare und Zahlentripel so wie die jeweils entsprechenden geometrischen Objekte zu bezeichnen.

Zusammen mit der geometrischen Deutung der Rechenoperationen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ können geometrische Sachverhalte in knapper Form algebraisch dargestellt werden, wobei diese algebraische Darstellung vielfach sehr einfach anschaulich gedeutet werden kann.

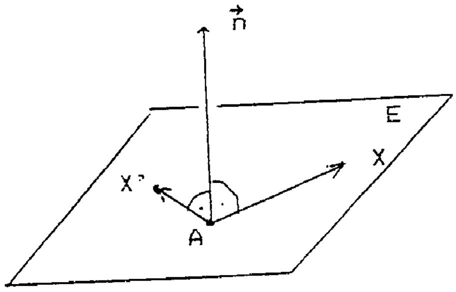
Beispielsweise kann man zu zwei in einem Koordinatensystem gegebenen Punkten A und B jeden Punkt X der Geraden $g = AB$ durch entsprechende geometrische Deutung von Rechenoperationen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ erfassen:

$$X \in g \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R}: \vec{AX} = t \cdot \vec{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R}: X = A + t \cdot \vec{AB}$$



Insbesondere kann man damit auch Teilungspunkte einer Strecke [AB] berechnen. So teilt der Punkt $T = A + \frac{2}{5} \cdot \vec{AB}$ diese Strecke im Verhältnis 2:3.

Ein weiteres Beispiel:
Die Darstellung einer Ebene E im Raum, von der ein Punkt A und ein Normalvektor $\vec{n}$ bekannt sind, ergibt sich daraus, daß ein Punkt X genau dann in E liegt, wenn die Pfeile $\vec{n}$ und $\vec{AX}$ normal sind:



$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{AX} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$$

Diese Beispiele zeigen, daß die Verwendung von Vektoren in der angegebenen Weise sowohl algebraisches Darstellen geometrischer Sachverhalte als auch geometrisches Interpretieren algebraischer Darstellungen erleichtern und verständlicher machen kann. Damit wird einem Hauptanliegen des Unterrichts in Analytischer Geometrie Rechnung getragen. Ferner kann dies auch für das Problemlösen, für produktives Arbeiten und für das Argumentieren hilfreich sein.

Außerdem ermöglicht die Verwendung von Vektoren in der Analytischen Geometrie (gegenüber einer Analytischen Geometrie ohne Vektoren) eine einfachere Bearbeitung von Sachverhalten und Problemen im Raum und kann so zur Förderung der Raumanschauung beitragen, die im Mathematikunterricht meist stiefmütterlich behandelt wird.

Im Hinblick auf die Lernziele in Analytischer Geometrie und auf die beschriebenen Möglichkeiten bei Verwendung von Vektoren sollten die Schüler möglichst selbständig Aufgaben bearbeiten, in denen sie geometrische Sachverhalte darstellen, insbesondere Formeln aufstellen, Problemlösungswege beschreiben und Begründungen durchführen.

Die Verwendung von fertigen Formeln zum Lösen von Aufgaben hilft, Teilschritte der Aufgaben rasch durchzuführen und ermöglicht oft erst die Lösung komplexer Probleme. Die Verwendung von fertigen Formeln befreit auch von der Denkarbeit die zur Herleitung dieser Formeln nötig ist. Andererseits sollte diese Denkarbeit, die zum Herstellen von Beziehungen zwischen geometrischen Sachverhalten und algebraischen Beschreibungen nötig ist, im Hinblick auf die Ziele des Unterrichts möglichst oft durchgeführt werden.

4. Zur Unterrichtspraxis

Im Unterricht und vor allem bei Leistungsfeststellungen herrscht das numerisch - rechnerische Lösen von Aufgaben vor. Die dazu nötigen Formeln werden sehr oft von der Lehrerin bzw. vom Lehrer an der Tafel hergeleitet. Häufig werden Formeln ohne geometrisch - anschaulichen Bezug rein rechnerisch aus anderen Formeln gewonnen. Beispielsweise wird aus der Parameterdarstellung einer Ebene durch Eliminierung der Parameter eine lineare Gleichung für die Koordinaten x,y,z der in der Ebene liegenden Punkte rein rechnerisch abgeleitet. Erst später wird gezeigt, daß die Koeffizienten dieser Gleichung einen Normalvektor der Ebene darstellen.

Oft werden für die Schüler zur Bearbeitung von Problemen spezifische Formeln bereitgestellt, obwohl diese Probleme auch ohne diese Formeln mit elementaren Kenntnissen unter Heranziehung grundlegender geometrischer Vorstellungen bearbeitet werden können.

Beispielsweise werden für die Berechnung des Abstandes $d(P,g)$ des Punktes P von der Geraden g die folgende Formeln angeboten:

$d(P,g) = |\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_0}|$ $(A \in g,\ \overrightarrow{n_0} \perp g,\ |\overrightarrow{n_0}| = 1)$

$d(P,g) = |\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{g_0}|$ $(A \in g,\ \overrightarrow{g_0}$ Richtungsvektor von g mit $|\overrightarrow{g_0}|=1)$

Die Berechnung dieses Abstandes entsprechend seiner Ermittlung aus einer Zeichnung, also durch Berechnung des Abstandes der Punkte P und S, wobei S der Schnittpunkt von g mit der Normalen zu g durch P ist, kann vielleicht etwas mehr Rechenzeit als das Einsetzen in eine der obigen Formeln erfordern, ist aber unmittelbar einsichtig und mit mehr Vorstellungen verbunden als das Einsetzen in eine fertige Formel.

über grundlegende Kenntnisse und Vorstellungen von Schülern auf dem Gebiet der Analytischen Geometrie gibt eine Diplomarbeit von A. Waldmann Auskunft, in der eine entsprechende Untersuchung in vier Wiener Gymnasien bzw. Realgymnasien in den Klassen 6,7,8 durchgeführt wurde. Nur in wenigen Klassen gab es befriedigende Teilergebnisse. Beispielsweise wurden auf die folgende Fragen meist nur unzureichende Antworten gegeben:

- Gib die Definition eines ein Vektors an!
- Welche geometrischen Vorstellungen verbindest Du mit einem Vektor?
- Wie lautet die Parameterdarstellung einer Geraden? Erkläre die vorkommenden Größen (Buchstaben, Symbole)!
  [Nur 16 von 380 Antworten waren völlig einwandfrei.]
- Erkläre die Parameterdarstellung anhand einer Zeichnung!
  [Wieder: Nur 16 von 380 Antworten sind völlig einwandfrei.]

- Gegeben ist der Punkt P(4/2) und der Normalvektor einer Geraden $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Wie lautet die Gleichung der Geraden? (Normalvektorform, nicht Parameterdarstellung) [161 von 360 richtig.]
- Erkläre diese Gleichung anhand einer Zeichnung. [Gemeint ist die Gleichung $3x+5y = 22$ der vorhergehenden Frage. Von 360 Antworten sind 31 richtig.]

5. Vorschläge für Aufgabenstellungen

Wesentlich ist bei den folgenden Aufgabenstellungen, daß die Schüler möglichst selbständig, also in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit tätig sind. Die Lehrerin bzw. der Lehrer sollte sich auf Hilfestellungen und Denkanstöße für einzelne Schüler oder gegebenenfalls für die gesamte Klasse beschränken und wichtige Teilergebnisse auf der Tafel festhalten.

Dazu sei auf eine Forderung des Mathematiklehrplans für die AHS hingewiesen:
"Bei den einzelnen Stoffgebieten sind Tätigkeiten angeführt, die einerseits die Bildungs- und Lehraufgabe konkretisieren, andererseits die Lernziele für die einzelnen Stoffgebiete festlegen. *Diese Tätigkeiten sind von den Schülern durchzuführen.*"[1]

In der Analytischen Geometrie wird speziell gefordert:
"Lösen von Lage- und Maßaufgaben - auch an Körpern - nach Möglichkeit in Verbindung mit zeichnerischen Darstellungen. Beschreiben von Lösungswegen (unter Umständen auch ohne Durchführung der Rechnungen), gegebenenfalls Begründen des Vorgehens. Aufstellen einfacher Vektorformeln"

[1]Hervorhebungen im Text durch den Autor

5.1 Entwicklung von Wissen durch Frage- und Problemstellungen, möglichst in Verknüpfung mit geometrischen Vorstellungen.

Aufgabe 5:

Eine Gerade g ist durch die Punkte $A = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ gegeben.

a) Ermittle einzelne Punkte von g.

[Mögliche Hilfestellungen:

- Fertige eine Zeichnung an.
- Es sei M der Mittelpunkt von AB; welche Beziehung besteht zwischen $\vec{AM}$ und $\vec{AB}$?
- Zeichne den Punkt P, sodaß $\vec{AP} = 2\cdot\vec{AB}$]

b) Beschreibe, wie man einen beliebigen Punkt $X\in g$ finden kann. Stelle eine Formel auf.

Aufgabe 6:

Eine Gerade g in der Ebene ist durch einen Punkt A und einen Richtungsvektor $\vec{g}$ festgelegt. Ist sie auch durch einen Punkt A und einen Normalvektor $\vec{n}$ festgelegt? Versuche eine Beziehung zwischen $\vec{n}$, dem Punkt A und einen beliebigen Punkt $X\in g$ zu finden. Ist eine Gerade g im Raum durch einen Punkt und einen Normalvektor $\vec{n}$ eindeutig festgelegt? Begründe.

5.2 Vielseitiges Anwenden von elementarem Wissen und von geometrischen Vorstellungen - "Einsparen von Formeln"

Aufgabe 7:

Definiere die folgenden Abstände und beschreibe, wie man sie mit der Formel für den Abstand zweier Punkte (ohne weitere Abstandsformel) berechnen kann. Gib zu jedem Fall ein Beispiel an und führe die zugehörige Berechnung aus.

a) Punkt - Gerade (im $\mathbb{R}^2$)
b) Punkt - Gerade (im $\mathbb{R}^3$)
c) Punkt - Ebene
d) Parallele Gerade (im $\mathbb{R}^2$)
e) Parallele Gerade (im $\mathbb{R}^3$)
f) Parallele Ebenen
g) Gerade - Ebene (Voraussetzung!)
h) windschiefe Gerade

Aufgabe 8:

Ermittle einen Vektor $\vec{n}$, der normal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}$

[Hinweis zu a):

$\vec{a}\cdot\vec{n} = 0 \qquad n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$

$\vec{b}\cdot\vec{n} = 0 \qquad -2n_1 + 4n_2 - n_3 = 0$]

5.3 Finden von Problemen

Aufgabe 9:

Nenne Fragen zu der folgenden Angabe. Beantworte die Fragen.

a) $x_1 = x_2$, $A = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ b) $x_1 = x_2$, $P = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\4\\7\end{pmatrix}$

5.4 Beschreiben von Lösungswegen

Aufgabe 10:

Wie kann man den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks im Raum berechnen?

5.5 Argumentieren

Aufgabe 11:

Beweise: Schneidet man einen Würfel mit einer Ebene, die normal zu einer Raumdiagonale ist und die durch den Mittelpunkt dieser Diagonale geht, so erhält man ein regelmäßiges Sechseck.
Wähle dazu ein Koordinatensystem so, daß jede Koordinatenachse eine Würfelkante enthält. Warum kann man sich auf einen Würfel mit der Kantenlänge 1 beschränken?

5.6 Klären von Begriffen

Aufgabe 12:

Was besagt: "$3x+4y = 8$ ist eine Gleichung der Geraden g?"
Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Gleichung und den Punkten von g?

5.7 Zusammenfassende schriftliche Wiederholungen

Aufgabe 13:

Beantworte schriftlich:

a) Durch welche Angaben kann eine Ebene im Raum eindeutig festgelegt werden? Was muß bei einer solchen Angabe jeweils vorausgesetzt werden? (Z.B.: Legen zwei Geraden eine Ebene fest, die diese beiden Geraden enthält?)

b) Beschreibe in jedem Fall, wie man eine Gleichung der Ebene ermitteln kann.